SF1624 Algebra och geometri

Nittonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

30 november, 2009

Egenvektorer

Definition (Egenvektor)

Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ så är $\overline{u}$ en *egenvektor* till T om $\overline{u} \neq 0$ och

$$\overline{u} || T(\overline{u})$$

dvs om $T(\overline{u}) = a\overline{u}$, för något $a \in \mathbb{R}$.

Exempel

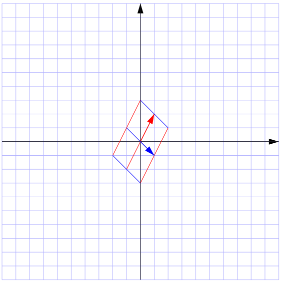
Om T ges av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ så är

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

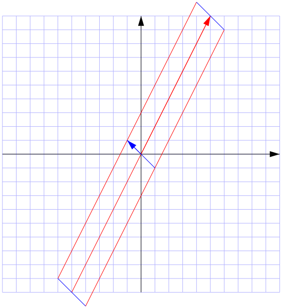
Bilden av egenvektorerna

Om vi ser på T som ges av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ får vi att

$$\begin{array}{rcl} (1,2)^t & \mapsto & 5(1,2)^t \\ (1,-1)^t & \mapsto & -(1,-1)^t \end{array}$$



$\mathbb{R}^n$



$T(\mathbb{R}^n)$

Egenvärden

Definition (Egenvärde)

Om T är en linjär avbildning och a är en skalär så att det finns en egenvektor $\overline{u}$ med

$$T(\overline{u}) = a\overline{u}$$

kallas a ett *egenvärde* till T med egenvektor $\overline{u}$.

Notera

Det kan finnas många egenvektorer till samma egenvärde.

- Om $\overline{u}$ är en egenvektor är alla nollskilda multipler av $\overline{u}$ också egenvektorer med samma egenvärde.
- Alla vektorer är egenvektorer till identitetsavbildningen $\mathrm{Id}(\overline{u}) = \overline{u}$ med egenvärde 1.

Den karaktäristiska ekvationen

För att det ska finnas egenvektorer med egenvärde a till avbildningen T måste det finnas icke-triviala lösningar till

$$T(\overline{u}) = a\overline{u}.$$

Om A är matrisen för T blir totalmatrisen för detta system

$$\left(\begin{array}{c|c} A - aI & 0 \end{array} \right)$$

Sats

a är ett egenvärde till avbildningen med matris A precis om

$$\det(A - aI) = 0.$$

Definition (Karaktäristiska ekvationen)

Ekvationen $\det(A - xI) = 0$ kallas den *karaktäristiska ekvationen* för matrisen A.

Att hitta egenvektorerna

När vi väl hittat egenvärdena till avbildningen kan vi hitta alla egenvektorer genom att lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{c|c} A - aI & 0 \end{array} \right)$$

för alla egenvärden a. Detta kan vi göra med Gausselimination.

Exempel

1 är ett egenvärde till T med matris $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ och vi kan hitta egenvektorerna med Gausselimination på

$$\frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1-3 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1-3 & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

och lösningarna blir
$(x, y, z) = (-s - t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$.

Ortogonala 3×3-matriser

Vi påstod tidigare att

Sats

En ortogonal 3×3-matris är antingen en spegling i ett plan eller en rotation kring en linje. En rotation är en sammansättning av två speglingar.

Vi skulle nu kunna förstå detta bättre genom att se på egenvärden och egenvektorer:

- Den karaktäristiska ekvationen har grad tre och har minst en reell rot.
- Ett egenvärde till en ortogonal matris måste ha belopp 1.
- Planet som är vinkelrätt mot egenvektorn måste bevaras.
- I det planet är det en rotation eller spegling.